Dynamische und statische Messung des Elastizitätsmoduls (M15)

Ziel des Versuches

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Schallimpulsen in Stäben aus unterschiedlichem Material soll mittels eines Piezoelements und der computergestützten Messwerterfassung gemessen und daraus der Elastizitätsmodul bestimmt werden. Zum Vergleich wird im zweiten Versuchsteil der Elastizitätsmodul statisch aus der Durchbiegung der einseitig eingespannten Stäbe bei unterschiedlicher Belastung ermittelt, wobei auch die L^3-Abhängigkeit des Biegepfeils verifiziert wird.

Theoretischer Hintergrund

In diesem Versuch werden elastische Eigenschaften von Körpern untersucht, die bisher in der Näherung des starren Körpers vernachlässigt wurden. Es gibt ein ganzes Gebiet der Physik „Mechanik der deformierbaren Medien“, das sich mit Dehnung, Stauchung, Torsion und Kompressibilität von Stoffen beschäftigt. Man spricht dann von *elastischer* Verformung, wenn der Festkörper nach Beendigung der Krafteinwirkung seine ursprüngliche Form wieder annimmt, von plastischer Verformung, wenn sich eine bleibende Formänderung ergibt. Die wichtigsten elastischen Konstanten sind der Elastizitätsmodul E, der Torsionsmodul G, der Kompressionsmodul K. Die elastischen Konstanten sind im allgemeinen Tensorgrößen.

Bleibt man in einer Dimension und betrachtet z. B. einen gespannten Draht, so ist im Bereich elastischer Verformung die Normalspannung σ (Spannung = Kraft/Querschnitt) proportional zur relativen Längenänderung $\varepsilon = \Delta l/l$ (Dehnung). Der Proportionalitätsfaktor ist der Elastizitätsmodul E (hooksches Gesetz):

$$\sigma = E\varepsilon \quad .$$

Ziel unseres Versuches ist es, den Elastizitätsmodul verschiedener Materialien (Eisen, Messing, Aluminium und Polycarbonat) sowohl dynamisch über die Messung der Schallgeschwindigkeit in diesen Medien als auch statisch über die Biegung dieser Materialien zu bestimmen. Dazu stehen Ihnen im Versuch Stäbe dieser Materialien zur Verfügung.

Die Schallausbreitung in Festkörpern ist wegen der stärkeren Kopplung der Atome untereinander um ein Vielfaches schneller als z. B. die Schallausbreitung in der Luft ($v_{\mathrm{Luft}} = 340\,\mathrm{m/s}$ bei 20 °C). Während Schallwellen in der Luft reine Longitudinalwellen sind, können sich im Festkörper sowohl longitudinale als auch transversale Schallwellen ausbreiten. Bereits anschaulich ist klar, dass die Schallausbreitung in Festkörpern von deren elastischen Eigenschaften und von der Dichte ρ des Materials abhängen muss. Die Schallgeschwindigkeit longitudinaler Deformationswellen in dünnen, elastischen Stäben ist gegeben durch eine einfache Beziehung[1]

$$v = \sqrt{(E/\rho)} \quad . \tag{1}$$

[1] Dünner Stab bedeutet: Stabdurchmesser ist klein gegen die Wellenlänge der Deformationswellen $\lambda = vT$

Schlägt man auf das Ende eines zu untersuchenden Stabes so erzeugt man eine Deformation, die sich als Schallimpuls oder Stoßwelle durch den Stab ausbreitet und an beiden Stab enden mehrfach reflektiert wird. Mit einem geeigneten Schallwandler (Piezokristall) lassen sich diese Mehrfachreflexionen gut aufzeichnen und aus derem zeitlichem Abstand T lässt sich die Schallgeschwindigkeit ermitteln.

Zur statischen Bestimmung des Elastizitätsmoduls werden die Stäbe einseitig horizontal als Freiträger eingespannt. Wird dabei das freie Ende durch eine Kraft F belastet, so wird es um den sogenannten Biegungspfeil s abgesenkt.

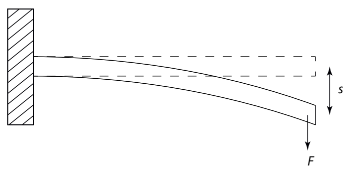


Abbildung 1: Biegepfeil s

Bleibt der Biegungspfeil klein, so gilt das hooksche Gesetz und die Querschnitte bleiben eben. Bei der Biegung werden die oberen Bereiche gedehnt und die unteren Bereiche gestaucht und nur die „Mittellinie" – neutrale Faser genannt – bleibt in ihrer Länge erhalten.

Das interessante Ergebnis ist, dass die Durchbiegung eines Trägers mit der *dritten* Potenz seiner Länge L zunimmt und dass der Biegepfeil s entscheidend vom *Profil* des Trägers abhängt, wobei das Profil durch das sogenannte Flächenträgheitsmoment I beschrieben wird. Es gilt

$$s = \frac{1}{3}\frac{F}{EI}L^3 \tag{2}$$

mit $I = \frac{\pi}{4}R^4$ für einen Stab (Vollmaterial) mit dem Radius R. Zur statischen Bestimmung des Elastizitätsmoduls wird (2) verwendet.

Theoretische Ergänzung: Theorie der Biegung (nur für Physikstudenten)

Es sei a der entlang der neutralen Faser gemessene Abstand zweier Stabquerschnitte. Bei Belastung ist die neutrale Faser mit dem Krümmungsradius R gekrümmt. Damit wird aber der Abstand a^* der beiden betrachteten Stabquerschnitte abhängig von der Distanz y zwischen „Messlinie" und neutraler Faser.

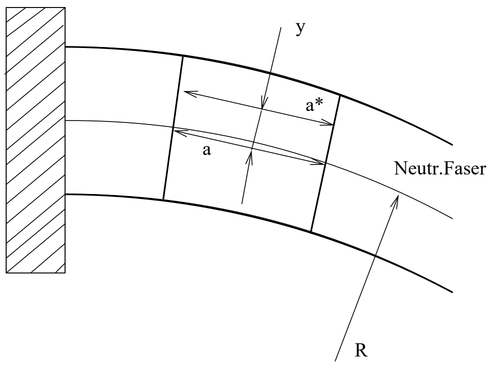
Nach dem Strahlensatz gilt dann:

$$\frac{R+y}{R} = \frac{a^*}{a}$$

woraus sich nach Umformung und Anwendung des hookschen Gesetzes ergibt:

$$\frac{y}{R} = \frac{a^* - a}{a} = \varepsilon = \frac{\sigma(x,y)}{E} \quad . \tag{3}$$

Die im Querschnitt auftretenden Zug- und Druckkräfte ergeben ein Drehmoment



$$M(x) = \iint y\sigma(x,y)\mathrm{d}A \quad . \tag{4}$$

Setzt man aus (3) die Spannung ein, so erhält man

$$M(x) = \frac{E}{R}\iint y^2 \mathrm{d}A \tag{5}$$

als Grundgleichung der um 1700 aufgestellten Bernoulli-Eulerschen Biegungstheorie, wobei

$$I = \iint y^2 \mathrm{d}A \tag{6}$$

als Flächenträgheitsmoment bezeichnet wird und y der senkrechte Abstand des Flächenelements dA von der neutralen Faser ist.

Durch die äussere Kraft F entsteht an der Stelle x im Stab ein Drehmoment

$$M(x) = (L-x)F \quad ,$$

das dem im Stab wirkendem Drehmoment (5) gleich sein muss. Somit gilt

$$(L-x)F = \frac{E}{R}I \quad . \tag{7}$$

Mit Hilfe der für große Krümmungsradien $R(x)$ geltenden differentialgeometrischen Beziehung $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{R(x)}$ lässt sich (7) wie folgt schreiben

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{(L-x)F}{EI} \quad .$$

Durch zweimalige Integration dieser Differentialgleichung unter Beachtung der Anfangsbedingungen (bei $x = 0$ ist $y = 0$ und $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 0$) ergibt sich eine Parabel dritter Ordnung als Lösung $y = \frac{F}{EI}(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{6})$. Damit ergibt sich an der Stelle $x = L$ für den Biegungspfeil (2):

$$s = \frac{1}{3}\frac{F}{EI}L^3 \quad .$$

Versuchsaufbau und -durchführung

Zur *dynamischen Bestimmung* des Elastizitätsmoduls über die Messung der Schallausbreitung einer Schockwelle stehen Ihnen Stäbe verschiedener Materialien, ein Piezo-Schallwandler, ein Rechner mit einem externen CASSY-Interface und die entsprechende CASSY-Software zur Verfügung. Das Interface verfügt über zwei Analogeingänge A und B. Im Versuch benötigen wir nur den analogen *Eingang A*, um das vom Schallwandler abgegebene Signal zu erfassen. Der zu untersuchende Stab soll senkrecht auf dem Piezo-Schallwandler stehen, der auf dem Fußboden ohne weitere Dämpfungsmaßnahmen platziert werden kann. Zur impulsförmigen Anregung der Stoßwelle wird der zwischen zwei Fingern locker festgehaltene Stab dann mit einem Holzstück auf seiner Oberseite *ganz leicht, aber kurz* angeschlagen. Hier sollten Sie mehrfach probieren bis sich ein optimales Ergebnis einstellt.

Vorher müssen Sie die Software CASSY starten. Klicken Sie dann bei dem im Fenster abgebildeten CASSY-Interface auf den gewählten Messkanal, um die Fenster Einstellungen/Sensoreigenschaften und Messparameter zu öffnen. Vor allem die folgenden Einstellungen sind entscheidend für das Gelingen Ihrer Messungen: 1. *Messbereich* (y-Auslenkung in Volt: ±10 oder ±30 V), 2. *Messintervall*: möglichst klein (Zeitauflösung z. B. 10 µs), 3. *Messzeit* über Anzahl der Messungen einstellen (Probieren Sie Messzeiten im Bereich von 20 bis 80 ms aus). Es ist *automatische Messaufnahme* mit *Triggerung* und einer *Schwelle* von ca. 2 bis 5 V einzustellen (Warum?). Die Messung wird mit F9 oder durch das Anklicken der Stoppuhr in der Symbolleiste gestartet. Die Aufzeichnung des Signals erfolgt dann nach Anschlagen des Stabes. Durch Anklicken des Bildes mit der rechten Maustaste kann die Messkurve in Ausschnitten vergrößert werden Zoom und mit Markierung setzen und Differenz bilden kann die Zeitdifferenz, vorzugsweise zwischen mehreren Echos, am Bildschirm ermittelt werden.[2]

[2] Probieren Sie mehrfach, bis Sie ein optimales Ergebnis haben. Am Versuchsplatz liegt zusätzlich eine *Kurzanleitung* der CASSY-Software aus.

Zur *statischen Messung* des Elastizitätsmoduls spannen Sie den zu untersuchenden Stab in die dafür vorgesehene Halterung, die sich an der Wand im Praktikum befindet, ein. Auf das andere Ende des Stabes setzen Sie die Muffe, an der sich ein Haken für die anzuhängenden Gewichte und eine Aufnahme für einen Laserpointer befindet. Belasten Sie den Stab durch Anhängen von Gewichten und messen Sie mit Hilfe des Lichtzeigers an einem in ca. 2-3 m Entfernung aufzustellenden Maßstab den entsprechenden Biegepfeil aus. Beachten Sie dabei den Abbildungsmaßstab. Zur Einstellung verschiedener Stablängen kann diese Muffe auf dem Stab verschoben werden.

Aufgabenstellung

1. Messen Sie die Echos von Schallimpulsen in den vier Stäben (Eisen, Aluminium, Messing, Polycarbonat) mit Hilfe des Schallwandlers und des CASSY-Systems. Interpretieren Sie die Messkurven (Verlauf, weitere beobachtete Schwingungen, evtl. Übersteuerungen, an welcher Stelle und warum gerade dort wurden die Laufzeiten von Ihnen abgelesen).

2. Bestimmen Sie aus der Laufzeit mehrerer Echos die Schallgeschwindigkeit in den verschiedenen Materialien (maximale Messunsicherheit).

3. Bestimmen Sie die Dichte der Stäbe (Wiegen und Volumenbestimmung, Bestimmung der maximalen Messunsicherheit).

4. Berechnen Sie nach (1) die Elastizitätsmodule der einzelnen Materialien (Angabe der maximalen Messunsicherheit der indirekten Messgröße).

5. Messen Sie die Biegepfeile bei einseitiger horizontaler Einspannung und Belastung der *Metallstäbe*:

(a) Halten Sie bei einem Stab die Länge fest und variieren Sie die Belastung.
$L = 80\,\text{cm}$, Belastung in 50 g Schritten)

(b) Halten Sie bei den anderen beiden Stäben die Belastung konstant (500 g Massestück) und variieren Sie die Länge durch Verschieben der Muffe. Überprüfen Sie bei jeder Messung den Nullpunkt .

6. Stellen Sie grafisch dar: $s = s(F)$ und für die Ergebnisse aus Aufgabe 5b $s = s(L^3)$ und ermitteln Sie aus den Anstieg der Ausgleichsgeraden das entsprechende Elastizitätsmodul nach (2) (Geben Sie die maximale Messunsicherheit an).

7. Vergleichen Sie die Ergebnisse untereinander und mit Tabellenwerten.

Fragen zur individuellen Vorbereitung des Versuchs:

- Informieren Sie sich über Schallgeschwindigkeiten in Medien und schätzen Sie den Zeitbereich ab, den Sie wählen müssen um die Mehrfachreflexionen (Echos) eines Schallimpulses in den Stäben zu beobachten?
- Überlegen Sie, wie man den Stab anschlagen muss, damit sich vorzugsweise longitudinale Wellen in Stablängsrichtung ausbreiten?
- Überlegen Sie, welchen Einfluss die durch den Schlag mitangeregten Eigenschwingungen des Stabes auf Ihre Messung haben und in welchen Zeitbereichen diese auftreten?
- Wie funktioniert ein Piezoelement?
- Was versteht man unter Triggerung?

Hinweise zur Berechnung der Messunsicherheit

Dynamisches Verfahren

$$E = v^2 \cdot \rho \quad \text{mit} \quad v = \frac{2L}{t} \quad \text{und} \quad \rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\frac{\pi}{4}d^2 \cdot L} \quad ,$$

wobei L die Stablänge und d der Stabdurchmesser sind.

Somit gilt entsprechend den Handregeln für die berechnete Messunsicherheit bei multiplikativer Verknüpfung:

$$\frac{\Delta v_\mathrm{L}}{v_\mathrm{L}} = \pm\left\{ \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta t}{t} \right\} \quad \text{und}$$

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = \pm\left\{ \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta L}{L} + \frac{2\Delta d}{d} \right\} \quad \text{und}$$

$$\frac{\Delta E}{E} = \pm\left\{ \frac{2\Delta v_\mathrm{L}}{v_\mathrm{L}} + \frac{\Delta \rho}{\rho} \right\} \quad .$$

Statisches Verfahren

Die Messunsicherheit der indirekten Messgröße sei am Beispiel der Abhängigkeit der Durchbiegung s von der wirkenden Kraft F bei konstanter Länge L erläutert. Es gilt nach Gl. (2) und Einsetzen der Messgrößen ein linearer Zusammenhang

$$s = \frac{L^3}{3E \cdot I} \cdot F = \frac{4L^3}{3\pi E \cdot R^4} \cdot F = \frac{64}{3\pi} \cdot \frac{L^3}{E \cdot d^4} \cdot F = a \cdot F$$

mit dem Anstieg

$$a = \frac{64}{3\pi} \cdot \frac{L^3}{E \cdot d^4}$$

für die Funktion $s = f(F)$.

Entweder wird die relative Unsicherheit $\frac{\Delta E}{E}$ von

$$E = \frac{64}{3\pi} \cdot \frac{L^3}{sd^4} \cdot F$$

aus der Summe der Absolutbeträge der relativen Unsicherheiten aller Messgrößen bestimmt

$$\frac{\Delta E}{E} = \pm \left\{ \frac{3\Delta L}{L} + \frac{\Delta s}{s} + \frac{\Delta F}{F} + \frac{4\Delta d}{d} \right\}$$

oder unter Berücksichtigung der relativen Unsicherheit des Anstieges a der Funktion $s = f(F)$. Wegen

$$E = \frac{64}{3\pi} \cdot \frac{L^3}{ad^4}$$

ergibt sich die relative Unsicherheit von E zu:

$$\frac{\Delta E}{E} = \pm \left\{ \frac{3\Delta L}{L} + \frac{\Delta a}{a} + \frac{4\Delta d}{d} \right\} \quad .$$

Letztere Methode hat den Vorteil, dass $\frac{\Delta a}{a}$ kleiner ist als $\frac{\Delta s}{s} + \frac{\Delta F}{F}$, da bei der Anstiegsbestimmung bereits eine grafische Mittelung über etwa sechs Wertepaare s, F erfolgte.