Statische und dynamische Bestimmung einer Federkonstanten (M16)

Ziel des Versuches

Die Federkonstante eines Masse-Feder-Systems soll statisch aus der Dehnung und dynamisch aus der Eigenfrequenz bestimmt werden.

Theoretischer Hintergrund

Das Masse-Feder System ist ein wichtiges physikalisches Konzept, welches auch in mikroskopischen Systemen als Modellbild Verwendung findet. So können die Bindungskräfte von Atomen in Molekülen qualitativ wie eine Feder beschrieben werden. Unter dem Einfluss dieser Bindungskräfte führen die Atome charakteristische Schwingungen um ihre Gleichgewichtslage aus und lassen sich dadurch identifizieren. Die thermisch bedingten Schwingungen der Atome um ihre Ruhelage im Atomgitter eines Festkörpers können ebenfalls im Modell der linearen Kette als Masse-Feder System beschrieben werden.

Das einfachste System ist ein Federschwinger, bei dem ein Massestück an einer Feder hängt. Lenkt man dieses System kurz aus, so schwingt es mit seiner Eigenfrequenz, die von der Federkonstante und der Masse des Massestücks abhängt.

Wir betrachten zuerst nur die Feder allein: Zieht man an der Feder, so spürt man die rücktreibende Kraft F_{R}, die der Auslenkung x entgegengerichtet ist und mit wachsender Auslenkung wächst. Es gilt also:

$$F_{\mathrm{R}} = -Dx\,, \tag{1}$$

wobei D die Federkonstante ist. Dieser Zusammenhang ist auch als hooksches Gesetz bekannt. Je härter die Feder ist, um so größer ist deren Federkonstante. Hängt man nun ein Massestück mit der Masse m an die Feder, so dehnt sie sich, bis das Kräftegleichgewicht $mg = F_{\mathrm{R}}$[1] (2. newtonsche Gesetz) erreicht ist.

Setzt man diese rücktreibende Kraft Gl. (1) in das 2. newtonsche Gesetz ein, so erhält man eine homogene Differentialgleichung (DGL) 2. Ordnung:

$$m\ddot{x} = -Dx\,. \tag{2}$$

[1] g = Erdbeschleunigung / Schwerebeschleunigung / Fallbeschleunigung $g \approx 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

Die Lösung einer DGL ist immer eine Funktion. Als plausiblen, periodischen Lösungsansatz für nicht zu starke Auslenkungen wählt man z. B. die harmonische Funktion

$$x = x_0 \sin \omega t \,, \qquad (3)$$

wobei x_0 die Amplitude und ω die Kreisfrequenz ist. Es gilt $\omega = 2\pi f = 2\pi / T$, wobei f die Frequenz und T die Schwingungsdauer ist. Setzt man die Funktion Gl. (3) in die GL (2) ein, so erhält man für die Kreisfrequenz ω genau einen Wert mit dem die Funktion Gl. (3) tatsächlich die Lösung der DGL ist. Diesen Wert ω_0 nennt man die Eigenfrequenz

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} \quad . \qquad (4)$$

Versuchsdurchführung

Für die statische Messung stehen Ihnen neben der Feder verschiedene Massestücke und ein langes Lineal mit Halterung zur Verfügung. Wählen Sie für Ihre Messungen geeignete Massekombinationen aus. Für die dynamische Messung wird zwischen Feder und Aufhängung (Stativstab) ein Kraftsensor angebracht. Das Ausgangssignal des Kraftsensors wird mittels des AD-Wandlersystems CASSY in ein digitales Signal verwandelt, das mit dem PC aufgezeichnet wird.[2]

[2] Der Umgang mit dem CASSY-System ist ein wesentlicher Bestandteil des Versuches M2.

Aufgabenstellung

1. Bestimmen Sie die Federkonstante statisch, indem Sie die Auslenkungen x der Feder für mindestens fünf verschiedene Massenwerte m messen. Führen Sie auf Millimeterpapier einen grafischen Geradenausgleich durch und bestimmen Sie aus dem Anstieg die Federkonstante.[3]

2. Bestimmen Sie die Federkonstante dynamisch, indem Sie für eine ausgewählte Masse m die Eigenfrequenz ω_0 des Federschwingers messen. Verwenden Sie dazu den Kraftsensor und das CASSY-System, um die Schwingung über einen bestimmten Zeitraum aufzuzeichnen. Zur möglichst genauen Bestimmung der Schwingungsdauer T liest man den Wert für $10\,T$ aus der Kurve ab (warum?).[4]

3. Vergleichen und diskutieren Sie Ihre Ergebnisse. Welchen Einfluss hat die Dämpfung der harmonischen Schwingung?

[3] Fertigen Sie die grafische Darstellung $x = f(m)$ bereits während der Versuchsdurchführung an. Schätzen Sie die Messunsicherheit ab und tragen Sie diese in den Graphen ein. Ermitteln Sie auch die Unsicherheit des Wertes des Anstiegs.

[4] Um die Messunsicherheit abzuschätzen, bestimmt man $10\,T$ mehrfach an verschiedenen Stellen der aufgenommenen Schwingungskurve.