PHYSIKA Physikalische Praktika der Universität Bremen

27.09.2022

Bestimmung des Brechungsindex mit den fresnelschen Formeln (O7)

Ziel des Versuches

Der materialspezifische Brechungsindex verschiedener Glassorten wird durch Messung des winkelabhängigen Reflexionskoeffizienten von polarisiertem Licht an der Grenzfläche Luft/Glas mit Hilfe der fresnelschen Formeln bestimmt.

Theoretischer Hintergrund

Trifft Licht auf Materie, so resultiert aus der elektromagnetische Welle des Lichts eine Auslenkung des Ladungsschwerpunktes der Elektronen des Atoms aus ihrer Ruhelage. Wie Sie aus dem Coulomb-Gesetz herleiten können, führt diese Auslenkung zu einer rücktreibenden, linearen Kraft die sich als harmonische Schwingung der Elektronenwolke relativ zur Ruhelage beschreiben lässt. Die Kraft ist abhängig von Ladungsträgerdichte und der Ausdehnung der Ladungsträgerverteilung, also von den Eigenschaften des Atoms.

Die Kraft des E-Felds des Lichts auf einen Ladungsträger $\vec{F} = -e\vec{E}(t) = -e\vec{E}_0 \exp(i\omega t)$ kann also mit der Gleichung für die harmonische Schwingung (Dämpfung wird in dieser Beschreibung vernachlässigt) gleichgesetzt werden:

$$\ddot{\vec{x}}(t) + \omega_0^2 \vec{x}(t) = -\frac{1}{m}\vec{F}(t) = -\frac{e}{m}\vec{E}_0 \exp(i\omega t) \quad .$$

Wobei m die Masse und ω_0 die Eigenfrequenz des Systems ist und wie eine elastische Bindung betrachtet werden kann.

Mit dem Ansatz $x(t) = x_0 \exp(i\omega t)$ erhält man die Lösung der DGL:

$$\vec{x}(t) = -\frac{e}{m}\frac{1}{m\omega_0^2 - \omega^2}\vec{E}(t) \quad .$$

Das induzierte Dipolmoment $\vec{p}$ des Atoms mit einem Elektron ist definitionsgemäß gegeben durch das Produkt aus Ladung und Auslenkung: $\vec{p}_i(t) = -e\vec{x}_i(t)$.

Nun betrachtet man die Polarisation des Mediums $\vec{P} = (\varepsilon - 1)\,\varepsilon_0\vec{E}$ mit ε der Dielektrizitätskonstante des Mediums und ε_0 der elektrischen Feldkonstanten. Die Verschiebungspolarisation im Medium lautet $\vec{P}(t) = \frac{\sum \vec{p}_i(t)}{V}$. Da sich in der Materie N Atome pro Volumeneinheit (V) befinden, muss dies in der Gleichung berücksichtigt werden.

$$\vec{p}(t) = -e\vec{x}(t)N = \frac{e^2N}{m}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}\vec{E}(t) = (\varepsilon - 1)\,\varepsilon_0\vec{E} \quad .$$

Damit erhält man für die Dielektrizitätskonstante für Atome mit einem Elektron:

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{e^2N}{\varepsilon_0 m}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

(der komplexwertige Anteil von ε ist bei dieser Herleitung durch die Vernachlässigung der Dämpfung entfallen).

Die Beziehung zwischen Brechungsindex und Dielektrizitätskonstante lautet nach der Maxwell-Beziehung für verdünnte Gase:

$$n^2 = \sqrt{\varepsilon} \approx 1 + \frac{1}{2}(\varepsilon - 1) = 1 + \frac{e^2N}{2\varepsilon_0 m}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad .$$

Besitzt das Atom mehrere Elektronen, so muss über die jeweilige Oszillatorstärke f_i und ggf. Eigenfrequenz $\omega_{0,i}$ summiert werden:

$$n^2 = 1 + \frac{e^2N}{2\varepsilon_0 m}\sum\frac{f_i}{\omega_{0,i}^2 - \omega^2} \quad .$$

Bei konzentrierten Medien mit geringer Absorption wie Gläsern muss ein Korrekturterm hinzugefügt werden, der die Wechselwirkung der Dipolmomente berücksichtigt.

Das bedeutet, dass der Brechungsindex sowohl von den atomaren Eigenschaften des Mediums, in der das Licht eindringt, als auch von der Frequenz, bzw. Wellenlänge des Lichts abhängt.

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichts im Medium ist um den Brechungsindex retadiert $c = c_0/n$ und damit ist auch die Wellenlänge des Lichts verkürzt $\lambda = \lambda_0/n$. Um die Stetigkeitsbedingung der Phase des Lichts an der Grenzfläche zwischen zwei Medien mit unterschiedlichen Brechungsindices zu erfüllen (vergl. Abb. 1), muss sich die Ausbreitungsrichtung im zweiten Medium ändern. Dies ist erfüllt, wenn $\lambda_1 \sin\alpha_1 = \lambda_2 \sin\alpha_2$ gilt, wobei λ_1, α_1 die Wellenlänge, bzw. der Einfallswinkel relativ zum Lot der Fläche im Medium 1 und entsprechend λ_2, α_2 im Medium 2 sind.

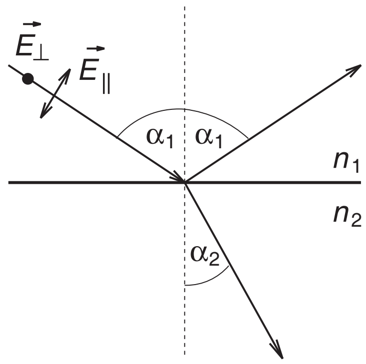

Abbildung 1: Reflexion und Transmission an einer ebenen Grenzfläche.

Mit der Beziehung $\lambda_{1,2} = \lambda_0/n_{1,2}$ folgt das snelliussche Brechungsgesetz:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1} \quad . \tag{1}$$

Wird das Atom durch die elektromagnetische Welle des einfallenden Lichts (im Folgenden mit Index e bezeichnet) mit der Frequenz ω zur Schwingung angeregt, so schwingt der Dipol mit dieser Frequenz. Er ist, nach dem huygensschen Prinzip, Ursprung einer Elementarwelle die in alle Richtungen abstrahlt. Die Überlagerung der Elementarwellen aller Atome des Mediums resultiert in einer Wellenfront in das Medium (gebrochene, transmittierte Wellenfront, im Folgenden mit Index t bezeichnet) und in Richtung des einfallenden Lichts (reflektierte Wellenfront, im Folgenden mit Index r bezeichnet). Für die Komponenten der elektrischen und magnetischen Feldstärke muss ebenfalls die Stetigkeitsbedingung an der Grenzfläche (Orientierung in x-, y-Richtung) erfüllt sein:

$$\begin{array}{ccccccccccc} E_{\mathrm{e},x} & + & E_{\mathrm{r},x} & = & E_{\mathrm{t},x} & \qquad & B_{\mathrm{e},x} & + & B_{\mathrm{r},x} & = & B_{\mathrm{t},x} \\ E_{\mathrm{e},y} & + & E_{\mathrm{r},y} & = & E_{\mathrm{t},y} & \qquad & B_{\mathrm{e},y} & + & B_{\mathrm{r},y} & = & B_{\mathrm{t},y} \end{array}$$

Betrachtet wird zunächst der Fall, dass das elektrische Feld senkrecht zu der, durch Einfallsvektor der Wellenfront und Flächennormale der Grenzschicht aufgespannten Ebene orientiert ist (TE-polarisiertes Licht). Für die Tangentialkomponente des E-Feldes ($E_\perp$) muss gelten:

$$E_\mathrm{e} + E_\mathrm{r} - E_\mathrm{t} = 0 \tag{2}$$

Die Tangentialkomponente des B-Feldes muss ebefalls stetig sein:

$$-B_\mathrm{e}\cos\alpha_{1,\mathrm{e}} + B_\mathrm{r}\cos\alpha_{1,\mathrm{r}} + B_\mathrm{t}\cos\alpha_{2,\mathrm{t}} = 0 \tag{3}$$

Mit dem Reflexionsgesetz $\alpha_{1,\mathrm{e}} = \alpha_{1,\mathrm{r}}$, der Beziehung $B_i = \frac{E_i}{c_i} = n_i \frac{E_i}{c_0}$ und Gl. 2 folgt für Gl. 3:

$$E_\mathrm{r}\left(n_1\cos\alpha_{1,\mathrm{e}} + n_2\cos\alpha_{2,\mathrm{t}}\right) + E_\mathrm{e}\left(n_2\cos\alpha_{2,\mathrm{t}} - n_1\cos\alpha_{1,\mathrm{e}}\right) = 0 \quad .$$

Damit erhält man für den Reflexionskoeffizienten r den Ausdruck:

$$\mathrm{r}_\perp = \frac{E_\mathrm{r}}{E_\mathrm{e}} = \frac{(n_1\cos\alpha_1 - n_2\cos\alpha_2)}{(n_1\cos\alpha_2 + n_2\cos\alpha_2)} \quad .$$

Die Intensität des reflektierten Lichts entspricht dem Quadrat der E-Felder. Entsprechend können die Transmission für $E_\perp$ und die Reflexion und Transmission für parallel polarisiertes Licht ($E_\parallel$) berechnet werden und man erhält folgende Ausdrücke:

$$R_\parallel = \frac{I_\parallel^{(r)}}{I_\parallel^{(0)}} = \left|\frac{n_2\cos\alpha_1 - n_1\cos\alpha_2}{n_2\cos\alpha_1 + n_1\cos\alpha_2}\right|^2 = \left|\frac{\tan(\alpha_1-\alpha_2)}{\tan(\alpha_1+\alpha_2)}\right|^2 \tag{4}$$

$$R_\perp = \frac{I_\perp^{(r)}}{I_\perp^{(0)}} = \left|\frac{n_1\cos\alpha_1 - n_2\cos\alpha_2}{n_1\cos\alpha_1 + n_2\cos\alpha_2}\right|^2 = \left|\frac{\sin(\alpha_1-\alpha_2)}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}\right|^2 \tag{5}$$

$$T_\parallel = \frac{I_\parallel^{(t)}}{I_\parallel^{(0)}} = \Re\left\{\frac{n_2\cos\alpha_2}{n_1\cos\alpha_1}\left|\frac{2n_1\cos\alpha_1}{n_1\cos\alpha_1 + n_2\cos\alpha_2}\right|^2\right\} = \Re\left\{\frac{4n_1n_2\cos\alpha_1\cos\alpha_2}{|n_2\cos\alpha_1 + n_1\cos\alpha_2|^2}\right\} \tag{6}$$

$$T_\perp = \frac{I_\perp^{(t)}}{I_\perp^{(0)}} = \Re\left\{\frac{4n_1n_2\cos\alpha_1\cos\alpha_2}{|n_1\cos\alpha_1 + n_2\cos\alpha_2|^2}\right\} \tag{7}$$

Hier bedeuten $\Re\{\ldots\}$ der Realteil und $|\ldots|$ der Absolutbetrag der entsprechenden komplexen Größe. Diese Formulierung ist notwendig, da Gl. (1) beim Lichteinfall vom optisch dichteren Medium $(n_1 > n_2)$ nicht für alle vorgegebenen Werte n_1 , n_2 und α_1 eine reelle Lösung α_2 besitzt. Im Falle komplexer Winkel α_2 tritt die weiter unten diskutierte Totalreflexion auf. Die Gleichungen (4) – (7) heißen fresnelsche Formeln. Wie man sich leicht überzeugen kann, gilt (in nicht absorbierenden Medien) aufgrund der Energieerhaltung:

$$R_\perp + T_\perp = R_\parallel + T_\parallel = 1 \quad . \tag{8}$$

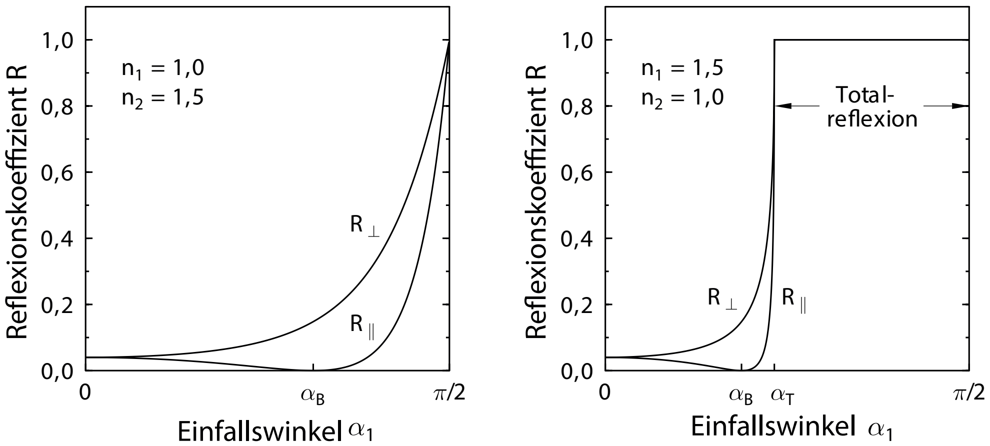

Abbildung 2: Winkelabhängigkeit der Reflexionskoeffizienten für parallel und senkrecht polarisiertes Licht beim Lichteinfall vom optisch dünneren Medium ($n_1 < n_2$, linkes Bild) bzw. vom optisch dichteren Medium ($n_1 > n_2$, rechtes Bild).

Die Winkelabhängigkeiten der Reflexionskoeffizienten sind beispielhaft in Abb. 2 dargestellt. Zwei spezielle Einfallswinkel sind für die dargestellten Funktionsverläufe des Reflexionskoeffizienten charakteristisch:

1. Für parallel polarisiertes Licht existiert ein Einfallswinkel $\alpha_1 = \alpha_B$, für den der Reflexionskoeffizient $R_{\|}$ gleich Null wird (vergleiche Abb. 2). Aus Gl. (1) und (4) ergibt sich:

$$\tan\alpha_B = \frac{n_2}{n_1} \qquad \text{und} \qquad \alpha_B + \alpha_2 = \frac{\pi}{2} \tag{9}$$

   α_B wird Brewster-Winkel genannt. Für diesen Einfallswinkel stehen die Richtungen des reflektierten und transmittierten Lichtes senkrecht aufeinander. Da die Dipole keine Strahlung parallel zu ihrer Schwingungsachse aussenden können, ist die Feldkomponente $R_{\|}$ entsprechend null.

2. Beim Übergang von einem optisch dichteren zu einem optisch dünneren Medium ($n_1 > n_2$) wird für $\alpha_1 > \alpha_T$ das Licht vollständig reflektiert (vergleiche rechtes Bild in Abb. 2). Es gilt:

$$\sin\alpha_T = \frac{n_2}{n_1} \tag{10}$$

   α_T ist der Grenzwinkel der Totalreflexion.[1]

[1] Der „äußere“ $(n_1 < n_2)$ und der „innere“ $(n_1 > n_2)$ Brewsterwinkel sind verschieden.

Versuchsaufbau und -durchführung

Den prinzipiellen Versuchsaufbau zeigt Abb. 3. Als reflektierendes Medium wird jeweils die polierte Seite verschiedener Glasquader verwendet. Zur Änderung des Einfallswinkels des Lichtes auf den zu untersuchenden Glasquader kann das Goniometer um seine Mittelpunktsachse gedreht werden. Der Detektor ist davon unabhängig um die gleiche Achse drehbar. Das Licht einer Lampe fällt auf eine Lochblende, die mit Hilfe einer Linse auf den Detektor abgebildet wird. Mit der Irisblende wird der Strahldurchmesser so eingestellt, dass kein Lichtanteil an dem Glasquader vorbeigeht. Die Einstellung des Polarisationszustandes erfolgt mit einem Polarisator.

Der in diesem Versuch verwendete Detektor ist eine Photodiode, deren Kurzschlussstrom proportional zur Lichtintensität ist. Zur Bestimmung des

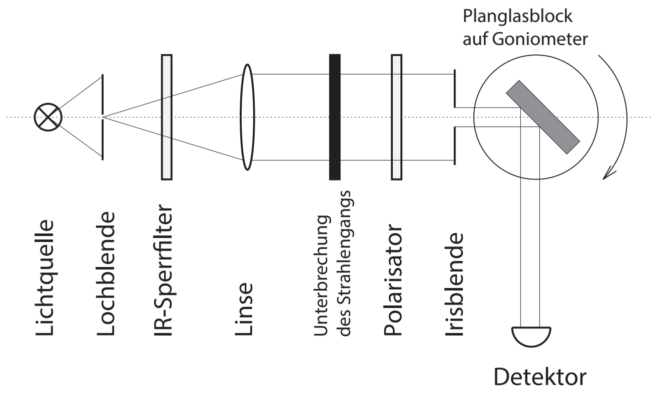

Abbildung 3: Anordnung zur Messung der Winkel- und Polarisationsabhängigkeit des Reflexionskoeffizienten.

Reflexionskoeffizienten sind sowohl die reflektierte als auch die einfallende Lichtintensität zu messen.

Aufgabenstellung

1. Bestimmen Sie bei drei verschiedenen Glasquadern (Kron-, Flint- und Schwerflintglas) die Abhängigkeit des Reflexionskoeffizienten vom Einfallswinkel sowohl für parallel als auch senkrecht polarisiertes Licht.[2] Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit den fresnelschen Formeln.
2. Bestimmen Sie aus den gemessenen Brewster-Winkeln die Brechzahlen der verwendeten Glasquader und vergleichen Sie diese mit Literaturwerten.

[2] Nehmen Sie für jeden Messwert auch den Hintergrund auf (Messwert bei Unterbrechung des Lichtweges) und ziehen Sie diesen von Ihrem Messwert ab. Beachten Sie, dass jede Änderung der Lichtbedingungen im Raum einen Einfluss auf Ihre Messung hat!

Anmerkung:

Aus den Maxwellgleichungen ergibt sich für die Phasengeschwindigkeit im sichtbaren Spektralbereich und unmagnetischen Materialien $(\mu \approx 1)$:[3]
$v_{\mathrm{Ph}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \cdot c$.[4]

Der Brechungsindex eines Mediums n ist das Verhältnis der Phasengeschwindigkeit des Lichtes im Vakuum zu der im Medium.

$$n = \frac{c}{v_{\mathrm{Ph}}} = \sqrt{\varepsilon}$$

Wie ε ist auch n eine komplexe Größe. Für transparente Medien, d. h. ohne Absorption, die durch den komplexen Anteil von n ausgedrückt wird, kann n als reelle Größe betrachtet werden.

[3] μ = Permeabilitätszahl

[4] ε = Dielektrizitätskonstante