28. Februar 2018

Adiabatenexponent (T7)

Ziel des Versuches

Im Versuch sollen die Adiabatenexponenten zweier Gase nach der Methode von Rüchardt bestimmt werden. Dazu wird jeweils ein Gasvolumen in einer Spritze durch schnelles Anschlagen des Kolbens in Schwingungen versetzt und die Schwingungsdauer gemessen.

Theoretischer Hintergrund

Eine Zustandsänderung, bei der kein Energieaustausch mit der Umgebung stattfindet, nennt man adiabatisch. Gemäß dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik wird sich z. B. ein sehr schnell ausdehnendes Gas abkühlen, da wegen $\Delta Q = 0$ (kein Wärmeaustausch mit der Umgebung) die Ausdehnungsarbeit auf Kosten der inneren Energie des Gases erbracht wird (Bsp. CO_2 -Patrone). Eine adiabatische Zustandsänderung wird mit der poissonschen Gleichung

$$pV^{\kappa} = \text{const} \tag{1}$$

beschrieben, wobei der Adiabatenexponent $\kappa = c_p/c_V$ der Quotient aus der spezifischen Wärme bei konstantem Druck und der spezifischen Wärme bei konstantem Volumen ist. Nach der kinetischen Theorie der Wärme (kinetische Gastheorie) ist die Energie für jeden Freiheitsgrad, der beim Stoss zweier Gasatome oder -moleküle am Energieaustausch teilnehmen kann, im Mittel $kT/2$ mit k als Boltzmannkonstante. Beim einatomigen Gas sind das nur die drei Freiheitsgrade der Translation, beim zweiatomigen Gas (Hantelmodell) kommen zwei Freiheitsgrade der Rotation hinzu. Bei mehratomigen Gasen sind es dann insgesamt sechs, d. h. drei Freiheitsgrade der Translation und drei Freiheitsgrade der Rotation.

Die Energie pro Mol und Freiheitsgrad beträgt $N_\mathrm{A}kT/2 = RT/2$ mit N_A als Avogadro-Konstante. Somit wächst bei einer Temperatursteigerung um 1 K der Energieinhalt eines Gases bei konstantem Volumen um $fR/2$, wobei f die Anzahl der zu berücksichtigenden Freiheitsgrade ist. Dieser Wert entspricht damit der spezifischen Molwärme bei konstantem Volumen $C_V = fR/2$. Wegen $R = C_p - C_V$ ergibt sich für die spezifische Molwärme bei konstantem Druck $C_p = (f+2)R/2$. Für den Quotienten κ gilt dann

$$\kappa = \frac{c_p}{c_V} = \frac{C_p}{C_V} = \frac{f+2}{f} \quad .$$

Im Versuch sollen die Adiabatenexponenten verschiedener Gase bestimmt werden. Dazu wird ein Kolbenprober zu etwa 2/3 mit dem entsprechenden

Gas gefüllt und mit einem Hahn verschlossen. Drückt man kurz auf den Spritzenkolben so wird das Gas komprimiert. Auf Grund der rücktreibenden Kraft werden Gas und Kolben in Schwingungen versetzt. Diese Zustandsänderungen gehen so schnell vor sich, dass kaum ein Energieaustausch mit der Umgebung stattfinden kann. Aus der Schwingungsdauer lässt sich der Adiabatenexponent ermitteln.

Der Kolben der Spritze befindet sich im Gleichgewicht, wenn der Druck p_0 (beim Volumen V_0) in der Spritze gleich der Summe aus äußerem Luftdruck p_L und dem durch das Kolbengewicht hervorgerufenen Druck ist:

$$p_0 = p_\mathrm{L} + \frac{mg}{A} \quad , \tag{2}$$

wobei m die Masse und A die Fläche des Kolbens ist. Wird der Kolben um eine Strecke x ausgelenkt, so ändert sich der Druck um Δp. Da dann auf den Kolben die rücktreibende Kraft $A\Delta p$ wirkt, gilt nach dem 2. newtonschen Axiom folgende Bewegungsgleichung:

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = A\Delta p \quad . \tag{3}$$

Nach Gl. (1) gilt $p_0V_0^\kappa = pV^\kappa$und damit:

$$p = \frac{p_0V_0^\kappa}{V^\kappa} \quad .$$

Eine Differentiation liefert:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V} = -\kappa\frac{p_0V_0^\kappa}{V^{\kappa+1}} \quad .$$

Hier kann das Volumen V durch das Volumen V_0 ersetzt werden, da $|V - V_0| \ll V_0$ ist. Es gilt also:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V} = -\kappa\frac{p_0}{V_0} \quad . \tag{4}$$

Bewegt sich der Kolben um die Strecke x, so beträgt die Volumenänderung $\Delta V = Ax$. Ersetzt man in Gleichung (4) die differentiellen Größen $\mathrm{d}V$ und $\mathrm{d}p$ näherungsweise durch die endlichen, aber kleinen Änderungen ΔV und Δp , so erhält man für die Druckänderung:

$$\Delta p = -\frac{\kappa p_0Ax}{V_0} \quad .$$

Setzt man dieses Ergebnis in die Bewegungsgleichung (3) ein, so erhält man folgende Differentialgleichung:

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\kappa p_0A^2}{mV_0}x = 0 \quad ,$$

die eine harmonische Schwingung beschreibt. Ein Vergleich mit $\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2 + \omega^2x = 0$ und die Berücksichtigung von $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ liefert für die Schwingungsdauer T des Kolbens

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{mV_0}{\kappa p_0A^2}}$$

und damit für den Adiabatenexponenten κ folgenden Ausdruck:

$$\kappa = \frac{4\pi^2mV_0}{T^2A^2p_0} \quad . \tag{5}$$

Aus der Schwingungsdauer T und den Messgrößen V_0 und p_0 (siehe Gl. (2)) sowie den gegebenen Größen m und A kann nun der Adiabatenexponent bestimmt werden.

In der Herleitung wurde nicht berücksichtigt, dass es sich durch die Reibung des Kolbens und anderer Energieverluste um eine gedämpfte Schwingung handelt. Ebenso ist zu erwähnen, dass in Wirklichkeit kein idealer adiabatischer Prozess existiert. So gibt es in der Praxis keinen Vorgang, der trotz guter Wärmeisolation so schnell abläuft, dass nicht doch ein geringer Wärmeaustauch stattfinden wird. Die bei guter Wärmeisolation tatsächlich ablaufende Zustandsänderung wird immer zwischen der rein adiabatischen und der rein isothermen Zustandsänderung verlaufen. Diesen realen Vorgang nennt man auch polytrop und den zugehörigen Exponenten den Polytropenexponenten n $(\kappa \geq n \geq 1)$. Zusätzlich sei betont, dass mit steigender Zahl der Atome in einem Gasmolekül auch die Zahl der möglichen Schwingungszustände zunimmt, die beim Stoß zweier Moleküle mit angeregt werden und deren Anregung Energie benötigt. In der Herleitung sind jedoch nur starre Partikel berücksichtigt worden.

Versuchsaufbau und -durchführung

Es sollen die Adiabatenexponenten für mindestens zwei verschiedene Gase bestimmt werden. Zuerst für Luft, dann für z. B. Argon. Dazu wird die Spritze zu etwa 2/3 mit dem zu untersuchenden Gas vorsichtig gefüllt und danach der Hahn verschlossen. Beim Gaswechsel ist die Spritze vor der eigentlichen Messung einmal mit dem neuen Gas zu spülen.

Wird der Kolben kurz mit dem Finger angeschlagen oder hochgezogen, so wird das Gas in der Spritze komprimiert bzw. entspannt. Die dabei entstehende rücktreibende Kaft bewirkt, dass das Gas und damit der Kolben Schwingungen ausführen. Zur Messung der Schwingungsdauer des Kolbens wird das Induktionsgesetz ausgenutzt: Wird ein Magnetfeld, das eine Spule durchsetzt, zeitlich verändert, so wird in der Spule eine Spannung induziert.

Auf der Fläche des Spritzenkolbens ist deshalb ein starker Neodym-Magnet angebracht, dessen Magnetfeld eine außen auf dem Spritzengehäuse befindliche Spule mit ca. 300 Windungen durchsetzt. Der Spulenhalter ist auf auf dem Spritzengehäuse mit Hilfe eines verschiebbaren O-Rings fixiert. Durch Verschieben des O-Rings kann die Lage der Spule in Bezug auf die Lage des Magneten verändert werden. Die Spule soll sich - auch bei schwingendem Kolben - möglichst etwa 1 cm oberhalb des Magneten befinden. Der Magnet soll nicht innerhalb der Spule schwingen.

Der zeitliche Verlauf der beim Schwingen des Kolbens induzierten Spannung wird nun mit dem Oszilloskop aufgezeichnet. Da es sich um einen einmaligen, kurzen Vorgang handelt, ist zur Aufzeichnung der Speichermodus des Oszilloskops einzustellen.

Aus dem aufgezeichneten zeitlichen Verlauf der Schwingung ist die jeweilige Schwingungsdauer möglichst genau zu bestimmen, da sie quadratisch in Gl. (5) eingeht. Messen Sie deshalb über möglichst viele Perioden und nutzen Sie die Cursorfunktion des Oszilloskops zum genauen Ablesen.

Das Volumen V_0 können Sie an der Maßeinteilung der Spritze ablesen. Die Dicke des verwendeten Magneten in der Spule wurde so gewählt, dass das Volumen des Magneten das Restvolumen zwischen Hahn und Nullmarke gerade kompensiert. Die Masse des Kolbens inklusive des Magneten beträgt $m = (110 \pm 3)$ g und der Kolbendurchmesser $d = (3{,}1 \pm 0{,}05)$ cm.

Bitte die geschliffene Fläche des Kolbens *nicht* mit den Fingern berühren!

Aufgabenstellung

1. Bestimmen Sie den Adiabatenexponenten von Luft und den eines weiteren Gases gemäß Gl. (5).

   (a) Führen Sie dazu jeweils fünf Messungen bei unterschiedlichen Volumina oberhalb von 50 ml durch.

   (b) Bestimmen Sie die Adiabatenexponenten aus einer grafischen Mittelung (z. B. Darstellung V_0 über T^2)

2. Führen Sie entsprechende Größtfehlerabschätzungen durch.

3. Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit den theoretisch erwarteten und diskutieren Sie eventuelle Abweichungen.