

# FEB-Arnolds Katzenabbildung

Jana Göken, Sebastian Suckau  
Universität Bremen, FB 03

22.11.19

# 1 Hintergrund

## 1.1 Arnolds Katzenabbildung

In unserer Forschungsarbeit haben wir uns mit „Arnolds Katzenabbildung“ beschäftigt. Diese ist wie folgt definiert:

$$T : [0, 1]^2 \longrightarrow [0, 1]^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \bmod 1,$$

wobei  $\bmod 1$  für  $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  definiert ist als

$$\bmod 1 : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow [0, 1] \\ x \longmapsto x - \lfloor x \rfloor.$$

Dabei handelt es sich um eine Selbstabbildung des Einheitsquadrates. Die Abbildung ist wegen

$$\det \left( \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right) = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 1$$

invertierbar und außerdem maßerhaltend. Weiterhin gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} u_{n-1} & u_n \\ u_n & u_{n+1} \end{pmatrix}$$

wobei  $u_n$  die  $n$ -te Fibonacci-Zahl ist.<sup>1</sup>

## 1.2 Diskretisierung

Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  kann man das Einheitsquadrat in  $n^2$  gleichgroße Felder unterteilen, die durch ihre Koordinaten  $\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} \in B_n^2$ ,  $B_n := \{0, 1, \dots, n-1\}$  eindeutig bestimmt werden.

**Definition 1.1.** Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Für  $k \in \mathbb{N}$  sei  $m = m(k)$  das eindeutige Element in  $B_n$  mit  $n|(k-m)$ . Dann ist  $\bmod n$  definiert als

$$\bmod n : \mathbb{N} \longrightarrow B_n \\ k \longmapsto m(k).$$

Die Abbildung ist wohldefiniert, da nur ein  $m \in B_n$  existiert, das die obige Bedingung erfüllt.

---

<sup>1</sup>Nach Dyson und Falk, 1992

Dann bildet die Abbildung

$$T_n : B_n^2 \longrightarrow B_n^2$$

$$\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} \pmod n,$$

eine Version der Katzenabbildung, die sich auf Diskretisierungen des Einheitsquadrats, z.B. Pixel eines quadratischen Bilds der Größe  $n \times n$ , anwenden lässt<sup>2</sup>. Dabei entspricht das Anwenden der Abbildung dem Neuordnen der Felder, da die Abbildung injektiv ist.

### 1.3 Poincaré-Wiederkehrsatz

Diese Abbildung ist interessant, da sie endlich oft angewandt auf ein solches Bild, wieder das ursprüngliche Bild ergibt. Im kontinuierlichen Fall ist dieses Verhalten durch den „Poincaré-Wiederkehrsatz“ (aus der Ergodentheorie) beschrieben. Wir liefern einen Beweis, wie er in vielen Lehrbüchern beschrieben ist.

**Satz 1.2** (Poincaré-Wiederkehrsatz). *Sei  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum mit endlichem Maß,  $T : X \longrightarrow X$  maßerhaltend. Dann gilt  $\forall A \in \mathcal{A}$ ,  $A$  keine Nullmenge,  $\exists m \in \mathbb{N}$ ,  $m \leq \frac{\mu(X)}{\mu(A)}$  sodass  $\mu(A \cap T^{-m}(A))$  keine Nullmenge ist.*

*Beweis.* Angenommen es existiert kein solches  $m$ . Dann muss es ein  $A \in \mathcal{A}$  geben,  $A$  keine Nullmenge mit  $N := \lfloor \frac{\mu(X)}{\mu(A)} \rfloor$ , sodass

$$\mu(A \cap T^{-j}(A)) = 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}$$

Also gilt  $\forall i, j \in \{1, \dots, N\}$ , o.B.d.A.  $i < j$

$$\mu(T^{-i}(A) \cap T^{-j}(A)) = \mu(T^i(T^{-i}(A) \cap T^{-j}(A))) = \mu(A \cap T^{i-j}(A)) = 0$$

Daher gilt

$$\mu(X) \geq \mu\left(\bigcup_{i=0}^N T^{-i}(A)\right) = \sum_{i=0}^N \mu(T^{-i}(A)) \stackrel{T \text{ maßerhaltend}}{=} (N+1)\mu(A)$$

Damit folgt

$$(N+1)\mu(A) \leq \mu(X)$$

$$\Leftrightarrow (N+1) \leq \frac{\mu(X)}{\mu(A)}$$

$$\Leftrightarrow N \leq \frac{\mu(X)}{\mu(A)} - 1$$

Steht im Widerspruch zu  $N := \lfloor \frac{\mu(X)}{\mu(A)} \rfloor$ , daher gibt es kein solches  $A$ , also existiert ein  $m$  wie im Satz beschrieben.  $\square$

---

<sup>2</sup>Dyson und Falk, 1992

Im diskreten Fall erreichen die Felder nach einer gewissen Anzahl an Iterationen mit  $T_n$  ebenfalls wieder die Anfangsposition, da es nur eine endliche Zahl von möglichen Feldanordnungen gibt und die Abbildung invertierbar ist. Im Anhang 6 finden Sie ein Matlabprogramm, das ein Bild quadratisch macht und es dann mit der Katzenabbildung iteriert, bis das Ursprungsbild wieder erreicht ist.

**Satz 1.3.** Für alle  $n \in \mathbb{N}$  existiert ein  $m \in \mathbb{N}$ , sodass  $T_n^m = id$  gilt.

*Beweis.* Die Anzahl der möglichen Anordnungen der  $n^2$  Felder beträgt  $n^2!$  und ist somit endlich. Deshalb existiert nach  $n^2!$  Iterationen mindestens eine Anordnung  $A$ , die zweimal auftaucht. Sei  $A$  das erste doppelt auftretende Bild. Angenommen  $A$  ist nicht das Anfangsbild, dann existieren zwei unterschiedliche Bilder  $B$  und  $C$  mit  $T_n(B) = T_n(C) = A$ . Dann wäre  $T_n^{-1}(A)$  nicht eindeutig und somit  $T$  nicht invertierbar. Also muss  $A$  das Anfangsbild sein.  $\square$

Tatsächlich braucht es dafür in der Regel deutlich weniger Iterationen als es Anordnungsmöglichkeiten gibt<sup>3</sup>.

**Definition 1.4.** Für  $n \in \mathbb{N}$  sei  $Z_n \in \mathbb{N}$ ,  $Z_n > 0$  definiert als die kleinste Zahl, für die gilt:  $T_n^{Z_n} = id$ .

**Beispiel 1.5.** Für die Abbildung  $T_3$  ist  $Z_3 = 4$ .

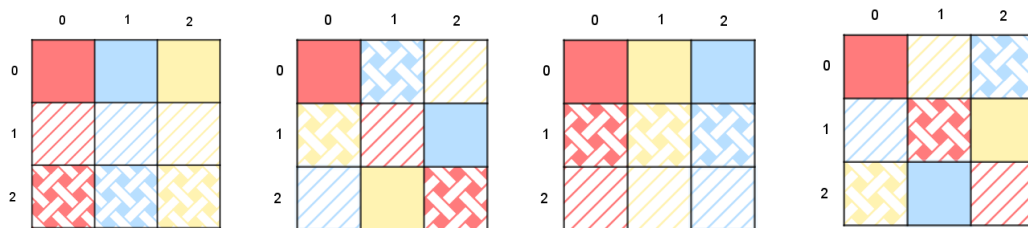


Abbildung 1: Iteration 0 bis 3 von  $T_3$

## 2 Unsere Aufgabe

Betrachtet man ein beliebiges, quadratisches Bild, beispielsweise das einer Katze, und ändert die Position von dessen Pixeln per Iteration mit der Katzenabbildung, so erhält man viele verschiedene Bilder, bis schließlich wieder das Bild der Katze entsteht. Die Bilder, die während dieser Iterationen entstehen, sind aber in der Regel eine wilde Durchmischung der Pixel und lassen wenig Struktur erkennen. Unser Forschungsziel war es daher, ein Bild zu finden, das während des Iterationsprozesses ein anderes sinnvolles Bild produziert. Dafür haben wir verschiedene Aspekte der Abbildung und der entstehenden Bilder unter die Lupe genommen.

<sup>3</sup>Dyson und Falk, 1992

## 2.1 Untersuchung der Abbildung

Die Katzenabbildung  $T_n$  schickt das Feld  $\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$  an die Position  $\begin{pmatrix} i+j \\ i+2j \end{pmatrix} \bmod n$ . Es ist einfacher die Abbildungen  $T_{n,1}$  und  $T_{n,2}$  mit

$$T_{n,1} : B_n^2 \longrightarrow B_n^2 \\ \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} \bmod n$$

$$T_{n,2} : B_n^2 \longrightarrow B_n^2 \\ \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} \bmod n$$

zu betrachten. Denn es gilt  $T_{n,2} \circ T_{n,1} = T_n$ . Hierbei entspricht  $T_{n,1}$  einer Verschiebung der  $j$ -Koordinate um den Wert  $i$  und  $T_{n,2}$  einer Verschiebung der  $i$ -Koordinate um den Wert  $j$ . Möchte man also wissen, wo ein bestimmtes Feld nach einer Anwendung der Katzenabbildung ist, so verschiebt man es zunächst so weit nach unten, wie es rechts ist und dann so weit nach rechts, wie es unten ist.

### 2.1.1 Phantombilder

Wenn man verschiedene Bilder mit der Katzenabbildung iteriert, bemerkt man schnell, dass manchmal Bilder zu sehen sind, die an das ursprüngliche Bild erinnern. Allerdings ist das ursprüngliche Motiv mehrfach zu sehen, wobei einige Pixel daraus fehlen.



Abbildung 2: "Phantombild" nach mehreren Iterationen, entfernt aus rechtlichen Gründen

### 2.1.2 Drehung

Eine weitere Eigenschaft der Katzenabbildung ist, dass für manche Pixelanzahlen  $n \in \mathbb{N}$  ein Bild erscheint, das auf ganz bestimmte Weise aufgebaut ist: Der Nullpunkt bleibt an Ort und Stelle, die oberste Zeile und linkeste Spalte (bis auf den Nullpunkt) werden jeweils gespiegelt und das verbleibende Quadrat um  $180^\circ$  gedreht.

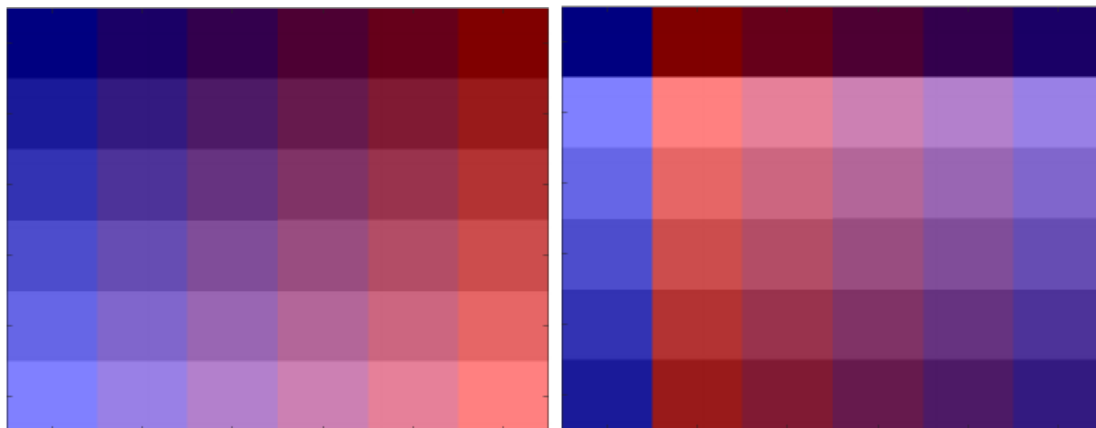


Abbildung 3: Drehung des Bildes nach der Hälfte der Iterationen

#### Definition 2.1.

Sei  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $n > 2$ . Dann heißt  $T_n^m$  Drehung, wenn gilt:

$$\begin{aligned} \binom{0}{0} &= T_n^m \left( \binom{0}{0} \right) \\ \binom{n-j}{0} &= T_n^m \left( \binom{j}{0} \right) && \forall j \in \{1, 2, \dots, n-1\} \\ \binom{0}{n-j} &= T_n^m \left( \binom{0}{j} \right) && \forall j \in \{1, 2, \dots, n-1\} \\ \binom{n-i}{n-j} &= T_n^m \left( \binom{i}{j} \right) && \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n-1\} \end{aligned}$$

$T_n^m \left( \binom{i}{j} \right)$  heißt dann das zu  $\binom{i}{j}$  gedrehte Feld.

## 2.2 Die Lösung

Mithilfe dieser Drehung ist es möglich, ein Bild zu finden, das die in unserer Aufgabe geforderten Eigenschaften erfüllt. Bei genügend großer Pixelanzahl wird dem Betrachter, der kaum einzelne Pixel wahrnimmt, die Drehung wie eine komplette  $180^\circ$  Drehung erscheinen. Gesucht ist also ein quadratisches Bild mit einer Pixelanzahl  $n \in \mathbb{N}$ , die eine Drehung hervorruft, sodass das auf den Kopf gedrehte Bild ebenfalls ein sinnvolles Motiv ergibt. Nach kurzer Internetrecherche fanden wir schließlich die Lösung:



Abbildung 4: Pinguin wird per Iteration zur Giraffe, entfernt aus rechtlichen Gründen

## 3 Bedingungen für die Drehung an die Pixelanzahl $n$

Es stellt sich direkt die Frage, für welche Pixelanzahlen eine solche Drehung auftritt und für welche nicht. Das Ergebnis für  $n \in \{3, 4, \dots, 300\}$  finden Sie in der Tabelle im Anhang 6. Es folgen einige notwendige Bedingungen an die Pixelanzahl  $n$ , sodass für alle  $n \in \mathbb{N}$ , die diese nicht erfüllen, die Drehung ausgeschlossen werden kann.

### 3.1 Bedingung an $Z_n$

Die Anzahl  $Z_n$  an Iterationen, die das Bild braucht, damit jedes Feld an seiner ursprünglichen Position ist, muss gerade sein, damit die Drehung auftreten kann. Dies liegt daran, dass die Drehung zu sich selbst invers ist. Tritt eine Drehung nach  $m \in \mathbb{N}$  Iterationen auf, so gilt  $T_n^{2 \cdot m} = id$ . Somit kann die Drehung nur nach  $Z_n/2$  Iterationen auftreten.

### 3.2 Bedingung an die Teiler von $n$

Im folgenden Satz 3.2 wird gezeigt, dass sich die Eigenschaft von  $T_n$ , eine Drehung aufzuweisen, auf  $T_k$  für alle Teiler  $k > 2$  von  $n$  überträgt. Für diesen Satz wird zunächst ein Lemma über die Eigenschaften von Modulo benötigt.

**Lemma 3.1.** Seien  $a, b \in \mathbb{N}$ , dann gelten

$$(i) \quad (a + b) \bmod k = (a \bmod k + b \bmod k) \bmod k$$

$$(ii) \quad (a \cdot b) \bmod k = (a \bmod k) \cdot (b \bmod k) \bmod k$$

*Beweis.*

(i) Es gilt

$$\begin{aligned} & k \mid (a - (a \bmod k)) \wedge k \mid (b - (b \bmod k)) \\ \Rightarrow & k \mid (a + b - ((a \bmod k) + (b \bmod k))) \\ \Rightarrow & (a + b) \bmod k = ((a \bmod k) + (b \bmod k)) \bmod k \end{aligned}$$

(ii) Es gilt

$$\begin{aligned} & k \mid (a - (a \bmod k)) \wedge k \mid (b - (b \bmod k)) \\ \Rightarrow & k \mid (a(b \bmod k) - (a \bmod k)(b \bmod k)) \wedge k \mid (b(a \bmod k) - (b \bmod k)(a \bmod k)) \\ \Rightarrow & k \mid (a(b \bmod k) - 2(a \bmod k)(b \bmod k) + b(a \bmod k)) \end{aligned} \quad (1)$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned} & k \mid (a - (a \bmod k)) \wedge k \mid (b - (b \bmod k)) \\ \Rightarrow & k \mid (a \cdot b - b(a \bmod k) - a(b \bmod k) + (a \bmod k)(b \bmod k)) \\ \stackrel{\text{mit (1)}}{\Rightarrow} & k \mid (a \cdot b - ((a \bmod k) \cdot (b \bmod k))) \\ \Rightarrow & (a \cdot b) \bmod k = ((a \bmod k) \cdot (b \bmod k)) \bmod k \end{aligned}$$

□

**Satz 3.2.** Seien  $n, k \in \mathbb{N}$ ,  $n > 2$ ,  $k > 2$ . Hat das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \binom{0}{0} &= T_n^m \left( \binom{0}{0} \right) \\ \binom{n-j}{0} &= T_n^m \left( \binom{j}{0} \right) & \forall j \in \{1, 2, \dots, n-1\} \\ \binom{0}{n-j} &= T_n^m \left( \binom{0}{j} \right) & \forall j \in \{1, 2, \dots, n-1\} \\ \binom{n-i}{n-j} &= T_n^m \left( \binom{i}{j} \right) & \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n-1\} \end{aligned} \quad (2)$$



eine Lösung  $m \in \mathbb{N}$ , so ist  $m$  auch eine Lösung für das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \bmod k &= T_k^{m_k} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \bmod k \right) & (3) \\
 \begin{pmatrix} n-j \\ 0 \end{pmatrix} \bmod k &= T_k^{m_k} \left( \begin{pmatrix} j \\ 0 \end{pmatrix} \bmod k \right) & \forall j \in \{1, 2, \dots, n-1\} \\
 \begin{pmatrix} 0 \\ n-j \end{pmatrix} \bmod k &= T_k^{m_k} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ j \end{pmatrix} \bmod k \right) & \forall j \in \{1, 2, \dots, n-1\} \\
 \begin{pmatrix} n-i \\ n-j \end{pmatrix} \bmod k &= T_k^{m_k} \left( \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} \bmod k \right) & \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n-1\}
 \end{aligned}$$

für alle Teiler  $k > 2$  von  $n$ .

*Beweis.* Sei  $m$  Lösung des Gleichungssystems 2, dann gilt  $a = T_n^m(b)$  für alle gedrehten Felder  $a$  und  $b$  in  $B_n^2$ . Mit Lemma 3.1 folgt  $n \mid \left( a - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^m \cdot b \right)$ , wobei

$n \mid \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} : \iff n \mid a_1 \wedge n \mid a_2$ . Dann gilt insbesondere für alle Teiler  $k > 2$  von  $n$   
 $k \mid \left( a - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^m \cdot b \right)$ , also mit Lemma 3.1  $a \bmod k = T_k^m(b \bmod k)$ . Somit ist  $m$  auch Lösung von Gleichungssystem 3 für alle Teiler  $k > 2$  von  $n$ .  $\square$

Es gilt also, dass für alle Teiler  $k > 2$  von  $n$  eine Drehung auftritt, wenn  $T_n$  dreht. Im Umkehrschluss kann  $T_n$  nur dann drehen, wenn für alle Teiler  $k > 2$   $T_k$  dreht. Die Umkehrung des Satzes gilt nicht, z.B. tritt die Drehung bei  $T_3$  und  $T_5$  auf, nicht jedoch bei  $T_{15}$ .

### 3.3 Algorithmus

Um alle  $n \in \mathbb{N}$  zu finden, für die  $T_n$  nicht dreht, kann man also folgenden Algorithmus anwenden. Man nimmt die kleinste nicht-drehende Zahl, dies ist die Vier, und streicht alle Vielfachen von Vier. Dann sucht man die nächste, nicht-drehende Zahl, das wäre die Elf, und streicht alle Vielfachen der Elf. Führe man so unendlich lange fort, so erhielte man alle Zahlen, die nicht drehen. Für  $2 \leq n \leq 300$  ist dies in der Tabelle im Anhang 6 illustriert.

## 4 Äquivalenzklassen

Es ist auch sehr interessant,  $B_n^2$  mithilfe der Katzenabbildung in bestimmte Äquivalenzklassen aufzuteilen, die uns mehr Aufschluss über das Verhalten der Abbildung geben. Beispielsweise hat es geholfen, Satz 3.2 zu formulieren und zu beweisen. Auch mit den Äquivalenzklassen kann man das Auftreten der Drehung untersuchen. Damit die Drehung passieren kann, muss jedes Feld nach  $Z_n/2$  Iterationen an der Position seines gedrehten Feldes, also da wo das Feld bei der Drehung sein müsste, ankommen. Nennt man Felder

äquivalent, wenn sie nach einer beliebigen Anzahl  $m \in \mathbb{N}$  an Iterationen die Position des anderen Feldes erreichen, so muss also insbesondere jedes Feld mit seinem gedrehten Feld in derselben Äquivalenzklasse sein, damit die Drehung auftreten kann.

**Definition 4.1.** Seien  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a, b \in B_n^2$  Felder. Definiere  $a$  äquivalent zu  $b$ ,  $a \sim b \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N} : T_n^m(a) = b$ .

Dann definiert  $\sim$  auf  $B_n^2$  eine Äquivalenzrelation, denn:

- 1.)  $T_n^0(a) = a \qquad \qquad \qquad \forall a \in B_n^2$
- 2.)  $T_n^m(a) = b \Rightarrow T_n^{Z_n-m}(b) = a \qquad \qquad \forall m \in \mathbb{N}, \forall a, b \in B_n^2$
- 3.)  $T_n^m(a) = b \wedge T_n^l(b) = c \Rightarrow T_n^{m+l}(a) = c \qquad \forall m, l \in \mathbb{N}, \forall a, b, c \in B_n^2$

Die Äquivalenzklasse von  $a$  wird bezeichnet mit  $[a]$ .

**Beispiel 4.2.** Betrachtet man zum Beispiel das Feld  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  in  $B_3^2$  und verfolgt seine Bahn unter den Iterationen, bis es wieder an seinem Ausgangspunkt angelangt ist, so erhält man seine Äquivalenzklasse  $\left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$ .

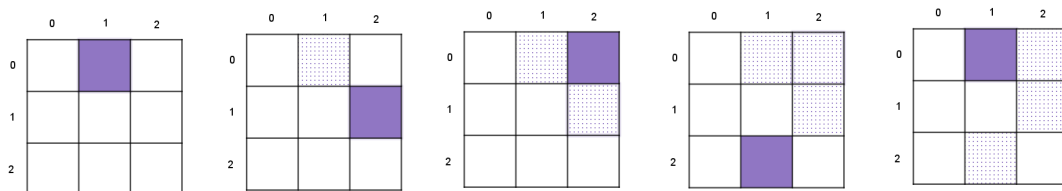


Abbildung 5: die ersten vier Iterationen des Feldes  $(1, 0)^T$

Insgesamt hat  $T_3$  die drei Äquivalenzklassen  $\left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$ ,  $\left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$  und  $\left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$

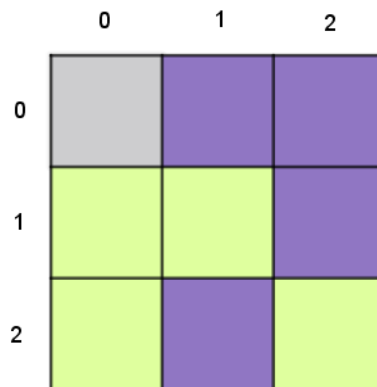


Abbildung 6:  $[(0, 0)^T]$  in grau,  $[(1, 0)^T]$  in lila und  $[(0, 1)^T]$  in grün

Für  $n, k \in \mathbb{N}, k|n$  definiere man zwei Felder in  $B_n^2$   $k$ -äquivalent, wenn die Felder modulo  $k$  bzgl.  $T_k$  äquivalent sind.

**Definition 4.3.** Seien  $n, k \in \mathbb{N}, k|n, a, b \in B_n^2$ . Definiere  $a$   $k$ -äquivalent zu  $b$ ,  $a \sim_k b : \Leftrightarrow a \bmod k \sim b \bmod k$  bzgl.  $T_k \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N} : T_k^m(a \bmod k) = b \bmod k$ .

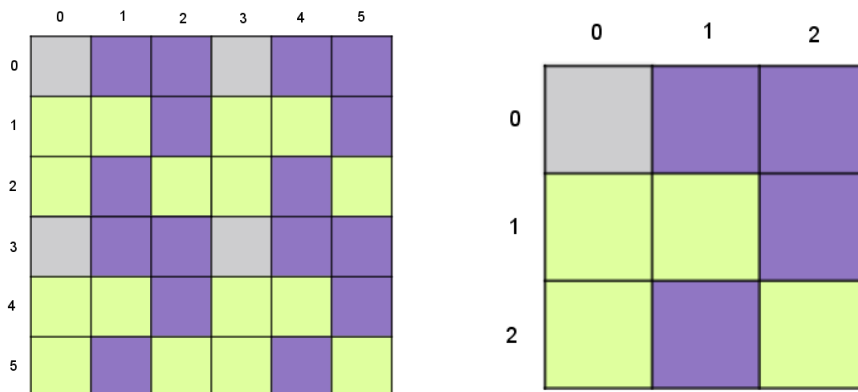
Dann definiert  $\sim_k$  auf  $B_n^2$  eine Äquivalenzrelation, denn:

- 1.)  $T_k^0(a \bmod k) = a \bmod k \quad \forall a \in B_n^2$
- 2.)  $T_k^m(a \bmod k) = b \bmod k \Rightarrow T_k^{Z_k - m}(b \bmod k) = a \bmod k \quad \forall m \in \mathbb{N}, \forall a, b \in B_n^2$
- 3.)  $\left( T_k^m(a \bmod k) = b \bmod k \wedge T_k^l(b \bmod k) = c \bmod k \right) \Rightarrow T_k^{m+l}(a \bmod k) = c \bmod k \quad \forall m, l \in \mathbb{N}, \forall a, b, c \in B_n^2$

Die  $k$ -Äquivalenzklasse von  $a$  wird bezeichnet mit  $[a]_k$ .

Betrachtet man also  $T_n$ , für  $k|n$  mit  $n = j \cdot k$  und bestimmt die  $k$ -Äquivalenzklassen von  $T_n$ , so muss der  $k \times k$ -Quadrant oben links nach Definition dieselbe Aufteilung in  $k$ -Äquivalenzklassen zeigen wie die restlichen disjunkten, überdeckenden  $k \times k$ -Quadranten. So wird das Quadrat in  $j^2$   $k \times k$ -Quadranten zerlegt, die alle die gleiche Aufteilung in die  $k$ -Äquivalenzklassen aufweisen. Diese stimmen hierbei nach Definition mit den Äquivalenzklassen von  $T_k$  überein.

**Beispiel 4.4.** Man vergleiche die 3-Äquivalenzklassen von  $T_6$  mit den Äquivalenzklassen von  $T_3$ .



(a) Die 3-Äquivalenzklassen bzgl.  $T_6$       (b) Die Äquivalenzklassen von  $T_3$

Abbildung 7: Äquivalenzklassen im Vergleich

Wir wollen nun die Aussage von Satz 3.2 anhand unserer Äquivalenzklassen erneut beweisen. Hierfür benötigen wir ein weiteres Lemma zu Modulo, sowie einen Hilfssatz zu den Äquivalenzklassen.

**Lemma 4.5.** Seien  $n, k \in \mathbb{N}$ ,  $k|n$ , dann gilt  $\forall j \in \mathbb{N} : (j \bmod n) \bmod k = j \bmod k$

*Beweis.* Sei  $n = m \cdot k$  für passendes  $m \in \mathbb{N}$ ,  $l = (j \bmod n) \bmod k$ , dann gilt:

$$\begin{aligned}
& n \mid (j - (j \bmod n)) \quad \wedge \quad k \mid ((j \bmod n) - l) \\
\Rightarrow & m \cdot k \mid (j - (j \bmod n)) \quad \wedge \quad k \mid ((j \bmod n) - l) \\
\Rightarrow & k \mid (j - (j \bmod n)) \quad \wedge \quad k \mid ((j \bmod n) - l) \\
\Rightarrow & k \mid ((j - (j \bmod n)) + ((j \bmod n) - l)) \\
\Rightarrow & k \mid (j - l) \\
\Rightarrow & l = j \bmod k
\end{aligned}$$

□

**Satz 4.6.** Seien  $n, k \in \mathbb{N}$ ,  $k|n$ ,  $a, b \in B_n^2$  mit  $a \sim b$ . Dann folgt  $a \sim_k b$ .

*Beweis.* Seien  $a, b \in B_n^2$ ,  $a \sim b \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N} : T_n^m(a) = b$

$$\begin{aligned}
& T_n^m(a) = b \\
& \text{nach Lemma 3.1} \\
& \Leftrightarrow \left( \left( \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right)^m \cdot a \right) \bmod n = b \\
& \Rightarrow \left( \left( \left( \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right)^m \cdot a \right) \bmod n \right) \bmod k = b \bmod k \\
& \text{nach Lemma 4.5} \\
& \Leftrightarrow \left( \left( \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right)^m \cdot a \right) \bmod k = b \bmod k \\
& \text{wegen Lemma 3.1} \\
& \Leftrightarrow T_k^m(a \bmod k) = b \bmod k
\end{aligned}$$

Somit gilt  $\exists m \in \mathbb{N} : T_k^m(a \bmod k) = b \bmod k$

$\Leftrightarrow a \bmod k \sim b \bmod k$  bzgl.  $T_k$

$\Leftrightarrow a \sim_k b$

□

Gilt nun also für ein  $k \in \mathbb{N}$ , dass zwei Felder  $a$  und  $b$  in  $B_k^2$  nicht äquivalent sind, so gilt für alle Vielfachen  $n$  von  $k$ , dass alle Felder  $c$  und  $d$  aus  $B_n^2$  mit  $c \bmod k = a$  und  $d \bmod k = b$  nicht äquivalent sind. Die Umkehrung des Satzes gilt jedoch nicht.

**Beispiel 4.7.**

i) Für beliebige  $n, k \in \mathbb{N}$ ,  $k \neq n$ ,  $k|n$  liegen  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} k \\ k \end{pmatrix}$  in derselben  $k$ -Äquivalenzklasse von  $T_n$ , jedoch nicht in derselben Äquivalenzklasse von  $T_n$ .

ii) Betrachte  $T_4$ . Es gilt  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sim_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ , aber  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \not\sim \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

Aus 4.6 lässt sich eine notwendige Bedingung für die Existenz der Drehung ableiten. Damit zwei Felder äquivalent sein können, müssen sie  $k$ -äquivalent sein für alle Teiler  $k$  von  $n$ . Das heißt im Umkehrschluss, sind zwei gedrehte Felder nicht  $k$ -äquivalent, können sie auch nicht äquivalent sein und somit kann keine Drehung existieren. Mit diesem Wissen können wir nun Satz 3.2 anhand der Äquivalenzklassen beweisen.

*Beweis von Satz 3.2.* Angenommen es gäbe einen Teiler  $k > 2$  von  $n$  so, dass  $T_k$  nicht dreht. Dann hat das Gleichungssystem 3 also keine Lösung. Dann gilt, dass eine Gleichung des Gleichungssystems keine Lösung hat, denn hätten die Gleichungen verschiedene Lösungen  $\{m_k^1, m_k^2, \dots, m_k^{k^2}\}$ , so wäre  $m_k = m_k^1 \cdot m_k^2 \cdot \dots \cdot m_k^{2^k}$  Lösung des Gleichungssystems. Es gilt also, dass mindestens ein Feld in  $B_k^2$  nicht mit seinem gedrehten Feld in derselben Äquivalenzklasse liegt. Liegt dieses Feld in der ersten Zeile, so gilt für  $k$  gerade, dass mindestens eines der Tupel

$$\left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ k-1 \end{pmatrix} \right), \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ k-2 \end{pmatrix} \right), \dots, \left( \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{k}{2}-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{k}{2}+1 \end{pmatrix} \right)$$

zwei Felder enthält, die nicht in derselben Äquivalenzklasse bzgl.  $T_k$  liegen. Für  $T_n$  gilt:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ n-1 \end{pmatrix} \sim_k \begin{pmatrix} 0 \\ k-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ n-2 \end{pmatrix} \sim_k \begin{pmatrix} 0 \\ k-2 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ n - (\frac{k}{2}-1) \end{pmatrix} \sim_k \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{k}{2}+1 \end{pmatrix}$$

Somit gilt also, dass eines der Tupel

$$\left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ n-1 \end{pmatrix} \right), \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ n-2 \end{pmatrix} \right), \dots, \left( \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{k}{2}-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ n - (\frac{k}{2}-1) \end{pmatrix} \right)$$

zwei Felder enthält, die nicht in derselben  $k$ -Äquivalenzklasse liegen. Für  $k$  ungerade ersetze hier  $\frac{k}{2} \pm 1$  durch  $\frac{k \pm 1}{2}$ . Nach Satz 4.6 liegen die beiden Felder somit auch nicht in derselben Äquivalenzklasse bzgl.  $T_n$ . Liegt das Feld, das nicht mit seinem gedrehten Feld in derselben Äquivalenzklasse liegt, in der ersten Spalte, gilt dasselbe für vertauschte Koordinaten. Liegt das Feld weder in der ersten Zeile, noch in der ersten Spalte, so liegt es in dem Quadrat  $\{1, 2, \dots, k-1\} \times \{1, 2, \dots, k-1\}$  und es gilt für

$$Q_{gerade}^k := \left\{ \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} \in \{1, 2, \dots, k-1\} \times \{1, 2, \dots, k-1\}; (j \geq k-i+1) \vee (j > \frac{k}{2} \wedge i = j) \right\}$$

für  $k$  gerade bzw.

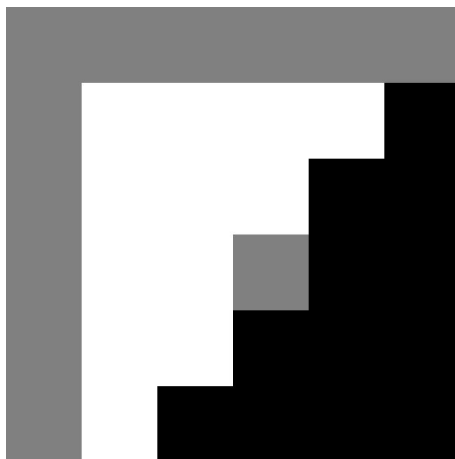


Abbildung 8:  $Q_{gerade}$  in schwarz für  $T_6$

$$Q_{ungerade}^k := \left\{ \binom{i}{j} \in \{1, 2, \dots, k-1\} \times \{1, 2, \dots, k-1\}; (j \geq k-i+1) \vee (j \leq \frac{k-1}{2} \wedge i=j) \right\}$$

für  $k$  ungerade, dass eines der Tupel  $\left( \binom{i}{j}, \binom{k-1}{k-1} - \binom{i}{j} \right), \binom{i}{j} \in Q^k$  zwei Felder enthält, die nicht in derselben Äquivalenzklasse bzgl.  $T_k$  liegen. Es gilt jedoch

$$\binom{k-1}{k-1} - \binom{i}{j} \sim_k \binom{n-1}{n-1} - \binom{i}{j}, \forall \binom{i}{j} \in Q^n.$$

Somit gilt also, dass eines der Tupel

$$\left( \binom{i}{j}, \binom{n-1}{n-1} - \binom{i}{j} \right), \binom{i}{j} \in Q^n$$

zwei Felder enthält, die nicht in derselben  $k$ -Äquivalenzklasse liegen. Nach Satz 4.6 liegen die beiden Felder somit auch nicht in derselben Äquivalenzklasse bzgl.  $T_n$ . Damit ist eine der Gleichungen aus Gleichungssystem 2 nicht lösbar und es folgt, dass das Gleichungssystem keine Lösung hat.  $\square$

In dieser Ausarbeitung haben wir Satz 3.2 zwar bereits mit anderen Methoden bewiesen, jedoch sind so definierte Äquivalenzklassen für Abbildungen sehr vielfältig anwendbar und es gibt sicher noch viele Eigenschaften der Katzenabbildung, die man mithilfe der Äquivalenzklassen zeigen kann.

## 5 Ausblick

Da der Algorithmus für das Finden der nicht-drehenden Zahlen sehr aufwendig ist, könnte es von Vorteil sein, einen besseren Algorithmus oder, falls möglich, eine direkte Methode zur Bestimmung der nicht-drehenden Zahlen zu finden.

Mithilfe der Äquivalenzklassen kann man die Katzenabbildung, sowie auch andere Abbildungen auf weitere Eigenschaften untersuchen. Es wäre zum Beispiel sehr interessant mehr über die in 2.1.1 beschriebenen Phantombilder und ihr Vorkommen zu erfahren.

## 6 Anhang

- Programm um ein Bild mit der Katzenabbildung zu iterieren in *./ProgrammBilditeration/bilditeration.m*
- Exceltabelle  $n$  bis 300 in *./Exceltabelle/gefaerbteExceltabelle.xlsx*
- Programm zum Erstellen der Exceltabelle in *./Exceltabelle/ProgrammExceltabelle/excelTabelle.m*

## 7 Quellen

- „Period of a Discrete Cat Mapping“, Freeman Dyson und Harold Falk, 1992

## 8 Bildquellen

Abb. 1 Selbst erstellt mittels GeoGebra

Abb. 2 <https://gsrosurgut.ru/images/black-cat.png>, letzter Zugriff 16.11.19

Abb. 3 Selbst erstellt mittels Matlab

Abb. 4 <https://files.merca20.com/uploads/2014/06/95a2d0373de335b359fc9b337dd8f3e8-223x300.jpg>, letzter Zugriff 16.11.19

Abb. 5 Selbst erstellt mittels GeoGebra

Abb. 6 Selbst erstellt mittels GeoGebra

Abb. 8 Selbst erstellt mittels Matlab

Abb. 7 Selbst erstellt mittels GeoGebra

Für eine Version mit allen Bildern kontaktieren Sie uns gerne unter:  
goeken@uni-bremen.de, ssuckau@uni-bremen.de